エルゴード変換と指数理論(作用素環論と指数理論)

浜地, 敏弘

数理解析研究所講究録
688巻 1989年 56-63

エルゴード変換と指数理論

九大教養　浜地敏弘　(Toshihiro Hamachi)

III型のAF因子環の分類は、

III型AF因子環 M

1対1　　　1対1

III型エルゴード非特異変換Tの軌道同型類 ⟷ (1対1) Flowの同型類 $(F_t)_{t\in R}$

によって、完全に決定されることが知られている。

では部分因子環 $N\subset M$ の分類について、flowレベルとorbit equivalenceのレベルでは、各々何が起きるだろうか?

$N\subset M$

?　　　　　　?

(orbit equivalence)　　　(flow)

flowレベルについては、幸崎氏の報告を見て貰うことにして、ここではorbit equivalenceのレベルについて報告する。 なおこれは、幸崎氏との共同の仕事で論文は現在タイプ中である。

§1 Orbital factor map.

異なる測度空間に作用しているエルゴード非特異可算変換群の対に対して、一方から他方への埋め込みなるものを旨く定義することにより、factor M, subfactor $N \subset M$ を作ることが出来る。

定義を述べる前に例を知っておいた方が，理解の手助けになるので２つ例を紹介する。

Ex.1 $0 < \lambda < 1$。

$$(X, \mathcal{B}_X, \mu_X) = \prod_{i=1}^{\infty} (\{0,1\}, \mathbb{B}(\{0,1\}), m_\lambda)$$

$$(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y) = \prod_{i=2}^{\infty} (\{0,1\}, \mathbb{B}(\{0,1\}), m_\lambda)$$

$$m_\lambda(0) = 1/(1+\lambda), \quad m_\lambda(1) = \lambda/(1+\lambda)$$

$$\pi : (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in X \longmapsto (\omega_2, \omega_3, \cdots) \in Y$$

$$\mathbb{F} = \pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$$

とおく。

$$g_{i,j}(\omega_1, \cdots, \omega_i, \cdots, \omega_j, \cdots) = (\omega_1, \cdots \omega_j, \cdots \omega_i, \cdots) \quad i, j \geq 1$$

$$h_{i,j}(\omega_2, \cdots, \omega_i, \cdots, \omega_j, \cdots) = (\omega_2, \cdots \omega_j, \cdots \omega_i, \cdots) \quad i, j \geq 2$$

とする。

・$G_X = g_{i,j}$, $i, j \geq 1$, より生成される群.

$\mathcal{G} = \quad g_{i,j} \quad , \quad i, j \geqq 2$, より生成される群

$G_Y = \quad h_{i,j} \quad , \quad i, j \geqq 2$, より生成される群.

Ex. 2. $\quad 0 < \lambda < 1$ 。

$$(Y, \mathbb{B}_Y, \mu_Y) = \prod_{i=1}^{\infty} (\{0,1\}, \mathbb{B}(\{0,1\}), m_\lambda)$$

$$(X, \mathbb{B}_X, \mu_X) = (Y, \mathbb{B}_Y, \mu_Y) \times (\{0,1\}, \mathbb{B}(\{0,1\}), m)$$

$$m(0) = m(1) = 1/2 .$$

$$m_\lambda(0) = 1/(1+\lambda) , \quad m_\lambda(1) = \lambda/(1+\lambda)$$

$$T(y_1, y_2, \cdots) = (y_1, y_2 \cdots) + (1, 0, 0, \cdots)$$ (右へ繰り上がり)

$$\forall (y_1, y_2, \cdots) \in Y.$$

$$\hat{T}(y, \varepsilon) = (Ty, \ \varepsilon + n(T, y) \ (\mathrm{mod}\, 2))$$

$$, \forall (y, \varepsilon) \in X,$$

ここで $\dfrac{d\mu_Y T}{d\mu_Y}(y) = \lambda^{n(T,y)}$

$$\pi(y, \varepsilon) = y$$

$$\mathbb{F} = \pi^{-1}(\mathbb{B}_Y)$$

$$G_X = \mathcal{G} = \{\hat{T}^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$G_Y = \{T^n ; n \in \mathbb{Z}\} 。$$

さて、以上の例を念頭に置いて、今 G_X, G_Y をルベーグ空間 $(X, \mathbb{B}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathbb{B}_Y, \mu_Y)$ に作用する可算エルゴード非特異変換群とする。

定義　有限対1の可測写像$\pi : X \longmapsto Y$に対して次の5条件を満たす部分群$\mathcal{G} \subset [G_X]$（$G_X$の充足群）が存在する時，$\pi$をorbital factor mapと言う。

(a)　$\mathrm{Orb}_{\mathcal{G}}(x) \cap \pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$，　$\forall x \in X$

(b)　$\mu_X(\pi^{-1}(E)) = \mu_Y(E)$，　$\forall E \in \mathcal{B}_Y$

(c)　$g(\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)) = \pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$，　$\forall g \in \mathcal{G}$

(d)　$\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$によってXのquotient space X_ζを作り，$\mathcal{G}$のX_ζへの作用を$\mathcal{G}_\zeta$と書くと，$\mathcal{G}_\zeta$はG_Yとπの下でorbit equivalentになる。

(e)　$\dfrac{d\mu_X g}{d\mu_X}$は$\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$−可測，$\forall g \in \mathcal{G}$。

EX.1，2の例がこれらの条件を満たしていることをcheckされたい。

なお条件（e）は，条件付確率の言葉で次のように言い換えることが出来る。（$P_y(\cdot))_{y \in Y}$を測度の標準系，即ち，

$$\mu_X(E \cap \pi^{-1}(F)) = \int_F P_y(E)\, d\mu_Y(y),\quad \forall E \in \mathcal{B}_X,\ \forall F \in \mathcal{B}_Y$$

とすると，条件（e）は条件

(e)′　$P_{\pi(x)}(u) = P_{\pi(g^{-1}x)}(g^{-1}u)$，　a.e. $x \in X$，$\overbrace{\forall g \in \mathcal{G}}^{\forall u : \pi(u) = \pi(x)}$

と同値である。

§2 orbital factor maps と Krieger factor

$\mathcal{R}_X$ を同値関係

$$u \overset{\mathcal{R}_X}{\sim} v \rightleftarrows u \in Orb_{G_X}(v)$$

とする。同様に $\mathcal{R}_Y$ を G_Y から定まる同値関係とする。

$\mathcal{R}_X$ の部分同値関係 $\mathcal{S}_X$ を

$$u \overset{\mathcal{S}_X}{\sim} v \rightleftarrows u \in Orb_{\mathcal{G}}(v)$$

と定める。

粗く言って、$\mathcal{R}_X$ から作られる Krieger factor $W^*(\mathcal{R}_X)$ は、左測度

$$d(\mu_X)_e(u,v) = d\mu_X(v), \quad \forall (u,v) \in \mathcal{R}_X$$

による $L^2(\mathcal{R}_X, (\mu_X)_e)$ の上に作用する convolution op. L_f、但し $f \in L^\infty(\mathcal{R}_X)$ はある"良い条件"を満たす関数,

$$L_f \xi(u,v) = \sum_{w \underset{\mathcal{R}_X}{\sim} v} f(u,w)\,\xi(w,v)$$

から生成される factor のことであった。詳しくは J. Feldmann and C. Moore Trans. A.M.S. 234 (1977), 234 (1977) を見られたい。

$M = W^*(\mathcal{R}_X)$ とおく。subfactor $N \subset M$ を次のように定める;

$$N = \{ L_f \in M \,;\, \operatorname{supp} f \subset \mathcal{S}_X,\ \exists \tilde{f} \in L^\infty(\mathcal{R}_Y) \text{ s.t. } f(u,v) = \tilde{f}(\pi(u), \pi(v)) \}.$$

M 上の state ψ を

$$\psi(\cdot) = (\cdot\, \chi_D \mid \chi_D)$$

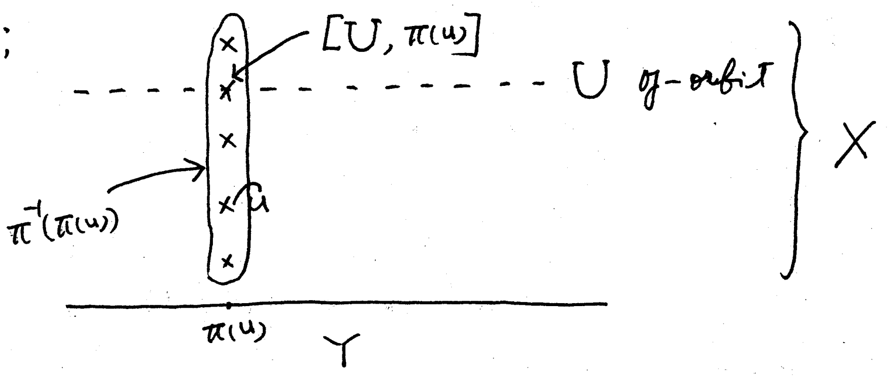
とする。 ここで $D = \{(u,u)\ ;\ u \in X\} \subset \mathcal{R}_X$ 。

ψ を preserve する M から N への条件付期待値 E_N が存在することが分かり、実際それは次で与えられる；

$$E_N(L_f) = L_g \ , \quad \forall L_f \in M$$

$$g(u,v) = \chi_{\mathcal{S}_X}(u,v) \sum_{\substack{U \\ \pi(u) \in \pi(U)}} P(U) f([U, \pi(u)], [U, \pi(v)]) 。$$

ここで U は $\mathcal{G}$-orbit を表わし、$P(U)$ は π-fibre と U の交点 z の条件付確率の値 $P_{\pi(z)}(z)$ を表わし、これは z のとり方に依らない。 $[U, \pi(u)]$ は次の図中の点を表わす；



従がって Jones projection e_N は

$$(e_N \xi)(u,v) = \chi_{\mathcal{S}_X}(u,v) \sum_{\substack{U \\ \pi(u) \in \pi(U)}} P(U) \xi([U, \pi(u)], [U, \pi(v)])$$

$$, \ \forall \xi \in L^2(\mathcal{R}_X, (\mu_X)_l)$$

以上の準備の下に、条件付期待値 E_N に依存する 李｜寿の 指数 Index E_N 理論を発展させ、エルゴード理論のデータを用いて詳しく記述することが期待される。

§3 主要な結果.

指数公式、基本拡大 $\langle M, e_N\rangle$ をエルゴード理論のデータを用いて、非常に具体的に書き下すことが出来る。

$$X_1 = \{ (u, U) : u \in X,\ U \text{は } \mathfrak{g}\text{-orbit で } U \subset \mathrm{Orb}_{G_X}(u) \}$$

$$d\mu_{X_1}(u, U) = \frac{1}{P(U)}\, d\mu_X(u)$$

とおく。 X_1 の新しい同値関係を

$$(u, U) \underset{\mathcal{R}_{X_1}}{\sim} (v, V) \rightleftarrows \pi(U) = \pi(V)$$

$$(u, U) \underset{\mathcal{S}_{X_1}}{\sim} (v, V) \rightleftarrows U = V$$

とする。

$$\pi_1 ; (u, U) \in X_1 \longmapsto u \in X$$

とおく。

$L^2(\mathcal{R}_{X_1}, (\mu_{X_1})_\ell)$ の上の convolution op. を特に L^1_F と書こう。 $L^1_F \in W^*(\mathcal{R}_{X_1})$ に対し

$$(\rho_F \xi)(u, s) = \sum_{(v, V) \underset{\mathcal{R}_{X_1}}{\sim} (u, U_s)} \sqrt{\frac{P(V)}{P(U_s)}}\, F((u, U_s), (v, V))\, \xi(v, [V, \pi(v)]$$

$$, \forall \xi \in L^2(\mathcal{R}_X, (\mu_X)_\ell)$$

おく。 ここで U_s は s を含む $\mathfrak{g}$-orbit。

定理 (1) $\langle M, e_N\rangle = \{ \rho_F ; L^1_F \in W^*(\mathcal{R}_{X_1}) \}$ 、かつ

$$\rho_F \in \langle M, e_N\rangle \longmapsto L^1_F \in W^*(\mathcal{R}_{X_1})$$

は $\langle M, e_N\rangle$ の standard representation を与えている。

(2) $\mathrm{Index}\, E_N = \sum_{i=1}^{\ell} K_i L_i / \mu_x(F_i)$

ここで $\{F_i ; 1 \le i \le \ell\}$ は $\mathcal{G}$-ergodic components で、
K_i は、$\pi : F_i \longmapsto Y$ が K_i 対 1 を意味し、L_i は $u \in F_i$
に対し $F_i \cap \mathrm{Orb}_{G_x}(u)$ の中の $\mathcal{G}$-orbits の個数を表わす。

(3) $E_0 : M \to N$ を minimum index を attain する場合の
conditional expectation とすると、

$$\mathrm{Index}\, E_0 = \Big(\sum_{j=1}^{\ell} \sqrt{K_i L_i} \Big)^2$$

注、(3) で実際に非整数の index E_0 を実現出来る。